Ю. П. ЛАПТИН

ОДНА ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА НА СЛУЧАЙНЫХ ДЕРЕВЬЯХ

УДК 519.854.64

Одним из возможных путей повышения эффективности метода ветвей и границ при решении задач дискретного программирования является выбор хороших стратегий поиска.

Вопросам исследования различных стратегий посвящены работы [1]—[4]. Наиболее полно задача выбора оптимальной стратегии может быть сформулирована в рамках теории последовательного статистического анализа [5], [6]. В настоящей работе рассматривается упрощенная вероятностная модель метода ветвей и границ. Для стратегий поиска из некоторого класса формулируются необходимые и достаточные условия оптимальности, кратко описывается полиноминальный алгоритм построения оптимальной стратегии, исходные данные для которого — информация о случайном дереве.

1. Полным бинарным деревом ранга n^0 назовем ориентированное дерево $T = (V, E)$ с корнем i^0, где V — множество вершин, E — множество дуг, в котором из каждой вершины, не являющейся висячей, исходят ровно две дуги, а длина пути из корневой в любую висячую вершину равна n^0.

Будем предполагать, следующее:

1) задано полное бинарное дерево $T = (V, E)$ ранга n^0, $V = \{1, 2, \ldots, i, \ldots, l\}$;

2) каждой висячей вершине i поставлено в соответствие некоторое число d_i;

3) каждой вершине i поставлена в соответствие случайная величина ξ_i, $\xi_i = 0 \vee 1$; для совокупности случайных величин $\xi = \{\xi_i, i \in V\}$ выполняются следующие предположения: если вершина i_1 — непосредственный предшественник вершины i, а вершины i_k, $k = \overline{2, l}$, не являются потомками вершины i, то для условных вероятностей имеет место $P(\xi_i = y/\xi_{i_k} = x_k,\ k = \overline{1, l}) = P(\xi_i = y/\xi_{i_1} = x_1)$, где $y = 0 \vee 1$, $x_k = 0 \vee 1$, $k = \overline{1, l}$, причем

$$P(\xi_i = 1/\xi_{i_1} = x_1) = \begin{cases} p_i, & \text{если } x_1 = 1, \\ 0, & \text{если } x_1 = 0, \end{cases}$$

$$P(\xi_{i^0} = 1) = p_{i^0}.$$

Система чисел $\{p_i, i \in V\}$ считается заданной, при этом (для простоты) $0 < p_i < 1$.

Для произвольной реализации $\bar{\xi} = \{\bar{\xi}_i, i \in V\}$ случайных величин $\xi = \{\xi_i, i \in V\}$ необходимо найти висячую вершину i такую, что $\bar{\xi}_i = 1$, и имеющую, по возможности, наименьшее значение d_i.

Упрощенной моделью метода ветвей и границ назовем систему (T, ξ, G), где G — процедура, которая на первом шаге проверяет значение $\bar{\xi}_{i^p}$, а на последующих по некоторому правилу R для проверки выбирает вершину из множества $A \cup \{i^*\}$. Здесь A — множество активных вершин в текущий момент времени, т. е. ни для одной из вершин $i \in A$ значение $\bar{\xi}_i$ еще не проверялось, для произвольного предшественника i^p вершины $i \in A$ выполняется $i^p \notin A$, значение $\bar{\xi}_{i^p}$ уже проверено и равно единице; i^* — фиктивная вершина, выбор которой обозначает прекращение поиска.

Наименьшее значение d_i (соответствующее вершине i, для которой $\bar{\xi}_i = 1$), найденное к текущему моменту времени, назовем рекордом и обозначим w^t. Если таких висячих вершин (со значением $\bar{\xi}_i = 1$) не обнаружено, полагаем $w^t = \bar{w}$, где $\bar{w}$ — достаточно большое число. Значение w^t, полученное при первом достижении висячей вершины i, такой что $\bar{\xi}_i = 1$, будем называть первым рекордом.

Правило $R: (w^t, A) \to A \cup \{i^*\}$ назовем стратегией поиска. Очевидно, для каждой реализации $\bar{\xi}$ стратегия R однозначно определяет рекорд $w^*_{\bar{\xi}}(R)$ в момент остановки и число произведенных проверок $\eta_{\bar{\xi}}(R)$. Средним убытком $u(R)$ назовем величину $u(R) = Mu_{\bar{\xi}}(R) = \sum_{\bar{\xi}} u_{\bar{\xi}}(R) P_{\bar{\xi}}$, где $u_{\bar{\xi}}(R) = w^*_{\bar{\xi}}(R) + \beta\eta_{\bar{\xi}}(R)$, β — стоимость одной проверки, суммирование производится по всем реализациям $\bar{\xi}$, $P_{\bar{\xi}}$ — распределение вероятностей на множестве реализаций.

Обозначим $\mathfrak{R}_г$ множество всех стратегий поиска ($\mathfrak{R}_г$ — конечное множество). Оптимальной (байесовской) стратегией называется стратегия $R^* \in \mathfrak{R}_г$ такая, что $u(R^*) = \min_{R \in \mathfrak{R}_г} u(R)$. Методы нахождения байесовских стратегий рассмотрены в [5], [6]. Однако в общем случае использование этих методов связано с большими вычислительными трудностями. В дальнейшем будем рассматривать специальный класс $\mathfrak{R}^\sigma \subset \mathfrak{R}_г$, для которого задача выбора оптимальной стратегии решается эффективно.

2. Перестановку $\sigma = (i_1, \dots, i_I)$ вершин дерева T назовем правильной, если она не нарушает частичного порядка дерева T.

Стратегию R будем называть перестановочной, если она порождается некоторой правильной перестановкой σ следующим образом:

а) до получения первого рекорда выбирается вершина $i_m \in A$ такая, что $m = \min \{k \mid i_k \in A\}$;

б) сразу после получения первого рекорда выбирается вершина i^* (поиск прекращается).

Будем искать оптимальную стратегию в классе $\mathfrak{R}^\sigma$ всех перестановочных стратегий.

Пусть $\sigma = (i_1, \dots, i_I)$ — правильная перестановка вершин дерева T, R_σ — соответствующая перестановочная стратегия. Обозначим i_{k_n}, $n = \overline{1, N}$, висячие вершины в перестановке σ (N — число висячих вершин). Тогда

$$\sigma = (i_1, \dots, i_{k_1}, i_{k_1+1}, \dots, i_{k_{N-1}+1}, \dots, i_{k_N}). \qquad (1)$$

Положим $\xi_i' = \beta \xi_{i^p}$, $i = \overline{1, I}$, где i^p — непосредственный предшественник вершины i (для корневой вершины i^0 введем фиктивного предшественника i^Φ, такого что $\xi_{i^\Phi} \equiv 1$, $P(\xi_{i^0} = 1/\xi_{i^\Phi} = 1) = P(\xi_{i^0} = 1)$);

$$v(i_{k_n}) = (i_{k_{n-1}+1}, \dots, i_{k_n}); \qquad (2)$$

$$\zeta_\xi(v(i_{k_n})) = \sum_{i \in v(i_{k_n})} \xi_i' + d_{i_{k_n}} \xi_{i_{k_n}}; \qquad (3)$$

$$\psi_\xi(\sigma) = \sum_{n=1}^{N} 1 \cdot (1 - \xi_{i_{k_1}}) \cdot \ldots \cdot (1 - \xi_{i_{k_{n-1}}}) \times \times \zeta_\xi(v(i_{k_n})); \qquad (4)$$

$$\psi_\xi^0 = (1 - \xi_{i_{k_1}})(1 - \xi_{i_{k_2}}) \cdot \ldots \cdot (1 - \xi_{i_{k_N}}) \overline{w}. \qquad (5)$$

Нетрудно проверить, что $u_\xi(R_\sigma) = \psi_\xi(\sigma) + \psi_\xi^0$ и $u(R_\sigma) = M\psi_\xi(\sigma) + M\psi_\xi^0$. Таким образом, задача построения оптимальной перестановочной стратегии сводится к выбору оптимальной перестановки σ^* такой, что $u(\sigma^*) = \min_{\sigma \in S} u(\sigma)$, где $u(\sigma) = M\psi_\xi(\sigma)$, S — множество всех правильных перестановок.

Учитывая (1) — (2), для перестановки σ в дальнейшем будем использовать обозначение $\sigma = (v(i_{k_1}), \dots, v(i_{k_N}))$. (Громоздкие доказательства ввиду ограниченного объема статьи будут опускаться.)

Лемма 1. Существует оптимальная перестановка $\sigma = (v(i_{k_1}), \dots, v(i_{k_N}))$, для которой выполняется следующее условие: любая вершина i, $i \in v(i_{k_n})$, $i \neq i_{k_n}$, является предшественником висячей вершины i_{k_n}, $n = \overline{1, N}$.

Таким образом, при исследовании условий оптимальности достаточно рассматривать только те перестановки, которые удовлетворяют условию леммы. Очевидно, каждая такая перестановка σ однозначно определяется некоторой перестановкой висячих вершин $\pi = (i_{k_1}, \dots, i_{k_N})$, при этом последовательность $v(i_{k_n})$ есть путь (ветвь), ведущий в висячую вершину i_{k_n}.

В дальнейшем будем рассматривать перестановки висячих вершин, которые для краткости обозначим $\pi = (j_1, \dots, j_N)$, соответствующую перестановку $\sigma = (v(j_1), \dots, v(j_N))$ назовем упорядоченным разложением дерева T на ветви.

Пусть $V(i)$ — множество вершин дерева T, достижимых из вершины i. Поддеревом $T(i)$ назовем порожденный подграф $\langle V(i) \rangle$. Рассмотрим перестановку $\pi_i = (j_1', \dots, j_{N'}')$ висячих вершин поддерева $T(i)$, соответствующее разложение $\sigma_i = (v_i(j_1'), \dots, v_i(j_{N'}'))$, и набор соседних вершин $g = (j_l', \dots, j_m')$, $m \geqslant l$, из перестановки π_i. Пусть V_g — множество вершин, принадлежащих ветвям $v_i(j_l'), \dots, v_i(j_m')$.

Набор $g = (j_l', \dots, j_m')$ будем называть связным относительно π_i набором, если порожденный подграф $\langle V_g \rangle$ связный, т. е. $\langle V_g \rangle$ — дерево. Вершину, являющуюся непосредственным предшественником корня дерева $\langle V_g \rangle$, назовем корнем набора g в разложении σ_i и обозначим $j_i^r(g)$.

Учитывая (2) — (3), положим:

$$\varkappa_i(g) = \sum_{k=l}^{m} 1 \cdot (1 - \xi_{j_l'}) \cdot \ldots \cdot (1 - \xi_{j_{k-1}'}) \zeta_\xi(v_i(j_k')),$$

$$\varphi(g, \pi_i) = M(\varkappa_i(g)/\xi_{j_i^r(g)} = 1)/P\left(\prod_{j' \in g} (1 - \xi_{j'}) = 1/\xi_{j_i^r(g)} = 1\right).$$

Пусть перестановка π_i представлена в виде $\pi_i = (g_1, \dots, g_L)$, где g_l — связный относительно π_i набор, $l = \overline{1, L}$. Множество $D(\pi_i) = \{g_1, \dots, g_L\}$ назовем разбиением перестановки π_i на последовательность связных наборов.

Пару (g_k, g_{k+1}) соседних связных наборов назовем связной, если они в совокупности образуют связный набор, в противном случае пара (g_k, g_{k+1}) несвязная.

Разбиение $D(\pi_i) = \{g_1, \dots, g_L\}$ назовем разбиением на неделимые наборы, если выполняются следующие условия.

A1 — для произвольного представления набора g_k, $k = \overline{1, L}$, в виде $g_k = (g_1', \dots, g_n')$, $n \geqslant 2$, где g_m' — связный относительно π_i набор, $m = \overline{1, n}$, хотя бы для одной пары $(g_{m'}', g_{m'+1}')$, $1 \leqslant m' \leqslant n - 1$, имеет место $\varphi(g_{m'}', \pi_i) > \varphi(g_{m'+1}', \pi_i)$.

А2 — для каждой связной пары (g_k, g_{k+1}) выполняется $\varphi(g_k, \pi_i) \leqslant \varphi(g_{k+1}, \pi_i)$.

Разбиение перестановки π_i на неделимые наборы будем обозначать $D^*(\pi_i) = \{x_1, \ldots, x_L\}$, x_k — неделимый набор.

Пусть $T(i_2) \subset T(i_1)$. Будем говорить, что перестановка π_{i_2} порождена перестановкой π_{i_1}, если π_{i_1} и π_{i_2} определяют одинаковое упорядочение висячих вершин поддерева $T(i_2)$.

Перестановку π_{i^0} назовем оптимальной, если оптимальна соответствующая перестановка σ_{i^0}.

Лемма 2. Пусть π_i порождена оптимальной перестановкой π_{i^0}, $D^*(\pi_i) = \{x_1, \ldots, x_L\}$ — разбиение перестановки π_i на неделимые наборы. Тогда имеем:

1) в перестановке π_{i^0} вершины из набора x_k, $k = \overline{1, L}$, следуют непосредственно одна за другой (образуют связный набор вершин);

2) $\varphi(x_k, \pi_i) \leqslant \varphi(x_{k+1}, \pi_i)$, $\quad k = \overline{1, L}$.

Рассмотрим произвольную перестановку π_{i^0}. Пусть i_1, i_2 — непосредственные потомки вершины i, а π_i, π_{i_1}, π_{i_2} — перестановки висячих вершин поддеревьев $T(i)$, $T(i_1)$, $T(i_2)$, порожденные перестановкой π_{i^0}.

Теорема. Перестановка π_{i_0} оптимальна тогда и только тогда, когда для любого поддерева $T(i_0)$ перестановка π_i представима в виде $\pi_i = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_L)$, где $\tilde{x}_l$, $l = \overline{1, L}$, — неделимый набор или из $D^*(\pi_{i_1})$, или из $D^*(\pi_{i_2})$, причем

$$\tilde{\varphi}(\tilde{x}_l) \leqslant \tilde{\varphi}(\tilde{x}_{l+1}), \qquad l = \overline{1, L\ 1}. \tag{7}$$

Здесь

$$\tilde{\varphi}(\tilde{x}_l) = \begin{cases} \varphi(\tilde{x}_l, \pi_{i_1}), \text{ если } \tilde{x}_l \in D^*(\pi_{i_1}), \\ \varphi(\tilde{x}_l, \pi_{i_2}), \text{ если } \tilde{x}_l \in D^*(\pi_{i_2}). \end{cases}$$

Рассмотрим рекуррентный алгоритм построения оптимальной перестановки. Очевидно, перестановка π_i для произвольного поддерева $T(i)$ ранга 0 определена однозначно (поддерево $T(i)$ состоит из одной висячей вершины i). Пусть построены перестановки π_i для всех поддеревьев ранга k, $k \geqslant 0$, и их разбиения на неделимые наборы $D^*(\pi_i) = \{x_1, \ldots, x_L\}$. Чтобы построить перестановку $\pi_{i'}$ для поддерева $T(i')$ ранга $k+1$, удовлетворяющую условию теоремы, достаточно упорядочить неделимые наборы из перестановок π_{i_1} и π_{i_2} так, чтобы выполнялось соотношение (7), где i_1 и i_2 — непосредственные потомки вершины i'. Пусть для перестановки $\pi_{i'} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_L)$ выполняется соотношение (7), здесь $\tilde{x}_l$ — неделимый набор или из $D^*(\pi_{i_1})$, или из $D^*(\pi_{i_2})$.

Легко видеть, что $x^l = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_l)$ — связный относительно $\pi_{i'}$ набор, $l = \overline{1, L}$. Положим $m = \min\{l \mid \varphi(x^l, \pi_{i'}) \leqslant \varphi(\tilde{x}_{l+1}, \pi_{i'})\}$. Можно показать, что $D^*(\pi_{i'}) = \{x^m, \tilde{x}_{m+1}, \ldots, \tilde{x}_L\}$ есть разбиение на неделимые наборы. При $k = n^0$ получаем оптимальную перестановку π_{i^0}.

Трудоемкость вычисления значения функции $\varphi(x^l, \pi_i)$ в наихудшем случае равна $\sim N_i$, где N_i — число висячих вершин поддерева $T(i)$. Откуда следует, что алгоритм построения оптимальной перестановки имеет трудоемкость $\sim N^2$, где N — число висячих вершин полного дерева $T(i^0)$.

Полученные результаты могут быть полезны при построении и анализе различных стратегий поиска в общей схеме метода ветвей и границ.

В заключение автор выражает благодарность В. С. Михалевичу, Н. З. Шору, А. И. Куксе за внимание и ряд полезных замечаний и советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kohler W. H., Steiglitz K. Characterization and Theoretical Comparison of Branch.-and-Bound Algorithms for Permutation Problems.— JACM, 1974, **21**, N 1, p. 140—156.
2. Ibaraki T. Theoretical Comparison of Search Strategies in Branch-and-Bound Algorithms. — Int. J. of Computer and Information Sciences, 1976, 5, N 4, p. 315—344.
3. Forrest J. J. H., Hirst J. P. H., Tomlin J. A. Practical Solution of Large Mixed Integer Programming Problems with UMPIRE.— Manag. Sci., 1974, **20**, N 5, p. 736—773.
4. Самыловский А. И. Об экономном представлении невыпуклого полиэдра. Депонировано в ВИНИТИ, № 347—77 Деп. (РЖ Матем., 1977, № 5, реф. 5В651).
5. Михалевич В. С. Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение. I.— Кибернетика, 1965, N 1, с. 45—56.
6. Михалевич В. С. Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение. II.—Кибернетика, 1965, № 2, с. 85—88.

Поступила в редакцию 21.V 1980