УДК 519.8

Ю.П. ЛАПТИН

ДЕКОМПОЗИЦИЯ ПО ПЕРЕМЕННЫМ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ[1]

Ключевые слова: *выпуклое программирование, декомпозиция, ε-субградиент.*

ВВЕДЕНИЕ

Оптимизационные задачи, возникающие при моделировании сложных технических объектов, часто содержат тысячи переменных и ограничений и, как правило, являются нелинейными. Для решения таких задач необходимо учитывать их особенности и структуру. Рассматриваемые объекты обычно состоят из совокупности связанных между собой блоков и подсистем, что отражается в структуре оптимизационных моделей [1]. В некоторых случаях такие модели сводятся к блочным задачам выпуклого программирования со связывающими переменными [2]. Особенностью рассматриваемых задач являются ограниченные области определения используемых функций. Применение методов декомпозиции по переменным для таких задач сопряжено с определенными трудностями. Настоящая работа посвящена преодолению некоторых из них.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ε-СУБГРАДИЕНТОВ

Пусть заданы $f^i(y, x)$, $i = 0, \dots, I$, — выпуклые собственные функции $(L + N)$-мерного вектора (y, x), $y \in E^L$, $x \in E^N$.

Обозначим $D = \{(y, x) : f^i(y, x) \le 0,\ i = 1, \dots, I\}$. Предполагается, что:

1) D — замкнутое множество, $D \subset \operatorname{int} \operatorname{dom} f^i$, $i = 0, \dots, I$;

2) множество D непусто и для него выполняется условие Слейтера;

3) в каждой точке области определения функции могут быть вычислены значение и некоторый субградиент этой функции.

Зафиксируем вектор y и рассмотрим задачу $P(y)$: найти

$$\min \{f^0(y, x) : x \in E^N, f^i(y, x) \le 0,\ i = 1, \dots, I\}. \tag{1}$$

Обозначим W множество тех значений вектора y, для которых решение задачи $P(y)$ существует, и определим функцию $\Phi(y)$:

$$\Phi(y) = \begin{cases} \min \{f^0(y, x) : x \in D(y)\},\ y \in W, \\ +\infty,\ y \notin W, \end{cases} \tag{2}$$

где $D(y)$ — множество всех x, удовлетворяющих ограничениям задачи $P(y)$.

Пусть W непусто. В [2] показано, что $\Phi(y)$ является собственной выпуклой функцией; там же определены правила вычисления субградиентов $g_\Phi(y)$ функции $\Phi(y)$. При этом задача (1) должна решаться точно, субградиент

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Украинского научно-технологического центра (грант № 1625).

© Ю.П. Лаптин, 2004

$g_\Phi(y)$ выражается через субградиенты функций $f^i(y, x)$ в оптимальной точке, которые должны выбираться специальным образом. Это реализуемо, если функции $f^i(y, x)$ дифференцируемы. В недифференцируемом случае возникают трудности, поскольку отсутствуют процедуры формирования субдифференциалов функций (в точке может быть вычислен только некоторый субградиент функции). Преодолеть эти трудности можно, переходя к использованию ε-субдифференциалов и процедур их внутренней аппроксимации [3–5].

Ниже определяются правила вычисления ε-субградиентов $g_\Phi^\varepsilon(y)$ функции $\Phi(y)$ в удобном для наших целей виде.

Теорема 1. Пусть $(\bar y, \bar x) \in \operatorname{int}\operatorname{dom} f^i$, $i = 0, \ldots, I$, $\bar y \in \operatorname{int} W$, для допустимого множества $D(\bar y)$ задачи $P(\bar y)$ выполняется условие Слейтера, заданы числа $\varepsilon_i \geq 0, i = 0, 1, \ldots, I$, в точке $(\bar y, \bar x)$ вычислены ε_i-субградиенты $g^i = (g_y^i, g_x^i)$ функций f^i такие, что для некоторых чисел $\bar u_i$, $i = 1, \ldots, I$, выполняется

$$g_x^0 + \sum_{i=1}^{I} \bar u_i g_x^i = 0, \tag{3}$$

$$\bar u_i \geq 0, i = 1, \ldots, I. \tag{4}$$

Тогда:

1) $\Phi(\bar y) \geq f^0(\bar y, \bar x) - \bar\varepsilon$;

2) если $\bar x \in D(\bar y)$, то $\bar\varepsilon$-субградиент функции $\Phi(y)$ в точке $y = \bar y$ может быть вычислен по формуле

$$g_\Phi^{\bar\varepsilon}(\bar y) = g_y^0 + \sum_{i=1}^{I} \bar u_i g_y^i, \tag{5}$$

где

$$\bar\varepsilon = \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^{I} \bar u_i(\varepsilon_i - f^i(\bar y, \bar x)). \tag{6}$$

Доказательство. Рассмотрим первое утверждение. Используя теорему Куна-Таккера, имеем

$$\Phi(\bar y) = \max_{u \geq 0} \min_x \left\{ f^0(\bar y, x) + \sum_{i=1}^{I} u_i f^i(\bar y, x) \right\} \geq$$

$$\geq \min_x \left\{ f^0(\bar y, \bar x) + (g_x^0, x - \bar x) - \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^{I} \bar u_i (f^i(\bar y, \bar x) + (g_x^i, x - \bar x) - \varepsilon_i) \right\}.$$

Отсюда, с учетом (3), получаем утверждение теоремы.

Докажем второе утверждение. Пусть в некоторой точке $y \in \operatorname{int} W$ для допустимого множества $D(y)$ задачи $P(y)$ выполняется условие Слейтера. Обозначим $x(y)$ решение задачи $P(y)$, $u_i(y) \geq 0$, $i = 1, \ldots, I$, — значения множителей Лагранжа, таких что

$$\Phi(y) = L_{u(y)}(y, x(y)) = f^0(y, x(y)) + \sum_{i=1}^{I} u_i(y) f^i(y, x(y)) =$$

$$= \min_x \left\{ f^0(y, x) + \sum_{i=1}^{I} u_i(y) f^i(y, x) \right\} = \max_{u \geq 0} \min_x \left\{ f^0(y, x) + \sum_{i=1}^{I} u_i\, f^i(y, x) \right\}.$$

Такие множители существует в соответствии с теоремой Куна–Таккера.

По условию теоремы в точке $\bar{y}$ для допустимого множества $D(\bar{y})$ условие Слейтера выполняется. Рассмотрим точку $y' \in \operatorname{int} W$, достаточно близкую к $\bar{y}$, в которой для множества $D(y')$ также выполняется условие Слейтера (такая точка существует в силу непрерывности функций $f^i(y, x)$, $i = 1, \ldots, I$).

Обозначим $x' = x(y')$. Очевидно, $\Phi(y') = L_{u(y')}(y', x') \geqslant L_{\bar{u}}(y', x')$. Поскольку $\bar{x}$ — допустимая точка задачи $P(\bar{y})$, а $\Phi(\bar{y})$ — значение целевой функции в оптимальной точке, то $\Phi(\bar{y}) \leqslant f^0(\bar{y}, \bar{x})$. Отсюда получаем

$$\Phi(y') - \Phi(\bar{y}) \geqslant L_{\bar{u}}(y', x') - f^0(\bar{y}, \bar{x}) =$$

$$= f^0(y', x') - f^0(\bar{y}, \bar{x}) + \sum_{i=1}^{I} \bar{u}_i\, [f^i(y', x') - f^i(\bar{y}, \bar{x}) + f^i(\bar{y}, \bar{x})] \geqslant$$

$$\geqslant (x' - \bar{x}, g_x^0) + (y' - \bar{y}, g_y^0) - \varepsilon_0 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{I} \bar{u}_i\, [(x' - \bar{x}, g_x^i) + (y' - \bar{y}, g_y^i) - \varepsilon_i + f^i(\bar{y}, \bar{x})] =$$

$$= \left(y' - \bar{y}, g_y^0 + \sum_{i=1}^{I} \bar{u}_i g_y^i \right) - \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^{I} \bar{u}_i\, [-\varepsilon_i + f^i(\bar{y}, \bar{x})].$$

Последнее равенство выполняется в силу (3), т.е. $g_{\Phi}^{\bar{\varepsilon}}(\bar{y}) = g_y^0 + \sum_{i=1}^{I} \bar{u}_i\, g_y^i$.

Теорема доказана.

Следствие 1. Для произвольной точки $\bar{x} \in D(\bar{y})$ при достаточно больших $\varepsilon_i \geqslant 0$ существуют ε_i-субградиенты $g^i = (g_y^i, g_x^i)$ функций f^i в точке $(\bar{y}, \bar{x})$ и числа $\bar{u}_i$, $i = 1, \ldots, I$, для которых выполняются соотношения (3), (4).

Для доказательства рассмотрим x^* — решение задачи $P(\bar{y})$. В силу необходимых условий оптимальности существуют субградиенты $g^i = (g_y^i, g_x^i)$ функций f^i в точке $(\bar{y}, x^*)$, для которых выполняются соотношения (3), (4). Нетрудно проверить, что эти субградиенты будут ε_i-субградиентами функций f^i в точке $(\bar{y}, \bar{x})$, где $\varepsilon_i = f^i(\bar{y}, \bar{x}) - f^i(\bar{y}, x^*) - (g_x^i, \bar{x} - x^*)$, $i = 0, \ldots, I$.

Пусть функции f^i непрерывно дифференцируемы, $i = 0, \ldots, I$, x^* — решение задачи $P(\bar{y})$, $g^{*i} = (g_y^{*i}, g_x^{*i})$ — градиенты функций f^i, $i = 0, \ldots, I$, в точке $(\bar{y}, x^*)$. Обозначим u_i^*, $i = 1, \ldots, I$, оптимальные значения множителей Лагранжа задачи $P(\bar{y})$, $I^* = \{i : i \in \{1, \ldots, I\},\, u_i^* > 0\}$.

Следствие 2. Пусть совокупность векторов $\{g_x^{*i}, i \in I^*\}$ линейно независима и образует базис в $E^N, \bar{x} \in D(\bar{y})$. Тогда существует достаточно малое $\sigma > 0$, такое, что если $\|\bar{x} - x^*\| \leq \sigma$, то соотношения (3), (4) выполняются при некоторых $\bar{u}_i$, где $g^i = (g_y^i, g_x^i)$ — градиенты функций f^i, $i = 0, \ldots, I$, в точке $(\bar{y}, \bar{x})$.

Доказательство следует из непрерывной дифференцируемости функций $f^i, i = 0, \ldots, I$. При этом одним из возможных решений будет такое, что $\bar{u}_i > 0$, если $i \in I^*$, иначе $\bar{u}_i = 0$.

Представленные результаты могут использоваться в алгоритмах решения задачи $P(\bar{y})$ для периодической проверки достигнутой точности решения и вычисления $\bar{\varepsilon}$-субградиента функции $\Phi(\bar{y})$.

В ситуации, когда множители $\bar{u}_i, i = 1, \ldots, I$, определяются из соотношений (3), (4) неоднозначно, может быть поставлена задача сформировать $\bar{\varepsilon}$-субградиент $g_\Phi^{\bar{\varepsilon}}(\bar{y})$ с минимальным значением $\bar{\varepsilon}$, т.е. минимизировать выражение (6) по $\bar{u}_i, i = 1, \ldots, I$, при ограничениях (3), (4).

Рассмотрим полученные результаты применительно к задаче линейного программирования. Пусть $f^i(y, x) = a_x^i x + a_y^i y + b^i, i = 0, \ldots, I$, где a_x^i, a_y^i — вектор-строки соответствующих размерностей.

Обозначим

$$A_x = \begin{Bmatrix} a_x^1 \\ \ldots \\ a_x^I \end{Bmatrix}, \; A_y = \begin{Bmatrix} a_y^1 \\ \ldots \\ a_y^I \end{Bmatrix}, \; b = \begin{Bmatrix} b^1 \\ \ldots \\ b^I \end{Bmatrix}, \; b(y) = b + A_y y, \; b^0(y) = b^0 + a_y^0 y.$$

Тогда задачу линейного программирования $P(y)$ и двойственную к ней можно представить в виде

$$\min_x \{a_x^0 x + b^0(y) : A_x x + b(y) \leq 0\}, \tag{7}$$

$$\max_u \{b(y)^T u + b^0(y) : A_x^T u + a_x^0 = 0, u \geq 0\}. \tag{8}$$

Очевидно, что в условиях теоремы 1 можно положить $\varepsilon_i = 0$, $i = 0, 1, \ldots, I$, а соотношения (3), (4) являются условиями допустимости двойственной задачи (8).

Лемма 1. В условиях теоремы 1 для задачи (7) имеет место $\bar{\varepsilon} = a_x^0 \bar{x} - b(\bar{y})^T \bar{u}$.

Доказательство. Легко видеть, что

$$\bar{\varepsilon} = -\sum_{i=1}^{I} \bar{u}_i f^i(\bar{y}, \bar{x}) = -(A_x \bar{x} + b(\bar{y}))^T \bar{u} = a_x^0 \bar{x} -$$
$$- a_x^0 \bar{x} - (A_x \bar{x} + b(\bar{y}))^T \bar{u} = a_x^0 \bar{x} - b(\bar{y})^T \bar{u}.$$

Лемма доказана.

Сформулированная лемма может быть полезна при использовании алгоритмов решения задач линейного программирования, генерирующих на каждой итерации допустимые точки прямой и двойственной задачи (см., например, [9]) — процесс решения может быть прерван при достижении требуемой точности. Близкие результаты для задач линейного программирования получены в [8].

В общем случае для вычисления $\bar{\varepsilon}$-субградиента функции $\Phi(\bar{y})$ должны разрабатываться специальные алгоритмы.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ БЛОЧНОЙ ЗАДАЧИ

Пусть заданы $f_q^i(y, x^q)$ — выпуклые функции $(L + N_q)$-мерного вектора (y, x^q), $y \in E^L$, $x^q \in E^{N_q}$, $i = 0, \ldots, I_q$, $q = 1, \ldots, Q$. Обозначим $X = (x^1, \ldots$ $\ldots, x^Q)$, $F(y, X) = \sum\limits_{q=1}^{Q} f_q^0(y, x^q)$.

Рассмотрим блочную задачу математического программирования со связывающими переменными: найти

$$\min_{y, X} F(y, X) = \min_{y, X} \sum_{q=1}^{Q} f_q^0(y, x^q) \tag{9}$$

при ограничениях

$$f_q^i(y, x^q) \leq 0, \; i = 1, \ldots, I_q, \; q = 1, \ldots, Q, \tag{10}$$

где $(y, X) = (y, x^1, \ldots, x^Q) \in E^L \times E^{N_1} \times \ldots \times E^{N_Q}$.

При фиксированных значениях y задача (9), (10) распадается на подзадачи вида (1) для каждого q, и задача (9), (10) эквивалентна следующей (координирующей): найти

$$\min \left\{ \sum_{q=1}^{Q} \Phi^q(y) : y \in E^L \right\}, \tag{11}$$

где $\Phi^q(y)$ — зависимость оптимального значения q-й подзадачи от связывающих переменных y.

Непосредственное использование задачи (11) в вычислительных алгоритмах затруднительно ввиду сложности описания подмножеств из E^L, на которых функции $\Phi^q(y)$ принимают конечные значения. В работе [2] для преодоления этих трудностей проводилась регуляризация задачи (11), позволяющая определить функции, аналогичные $\Phi^q(y)$, на всем пространстве E^L.

В связи с тем, что функции $f_q^i(y, x^q)$ определены на ограниченных множествах, для регуляризации приходится использовать другой прием. Введем вспомогательные переменные $v^q = (v_1^q, \ldots, v_L^q)$ и вместо задачи (9), (10) будем рассматривать следующую: найти

$$\min_{x, y, v} \sum_{q=1}^{Q} \left\{ f_q^0(v^q, x^q) + M_q \sum_{l=1}^{L} |y_l - v_l^q| \right\} \tag{12}$$

при ограничениях

$$f_q^i(v^q, x^q) \leq 0, \; i = 1, \ldots, I_q, \; q = 1, \ldots, Q, \tag{13}$$

где $v^q \in E^L$, $q = 1, \ldots, Q$.

Из свойств негладких штрафных функций [2] следует лемма.

Лемма 2. Пусть задача (9), (10) имеет решение. Тогда при достаточно больших положительных значениях M_q, $q = 1, \ldots, Q$, решения задач (9), (10) и (12), (13) совпадают.

Обозначим $z^q = (v^q, x^q)$, $z^q \in E^L \times E^{N_q}$. При фиксированных значениях y задача (12), (13) распадается на подзадачи

$$\Psi^q(y) = \min_{z^q} \left\{ f_q^0(z^q) + M_q \sum_{l=1}^{L} |y_l - z_l^q| : f_q^i(z^q) \leq 0, i = 1, \ldots, I_q \right\}. \quad (14)$$

Пусть системы ограничений задач (14) совместны и эти задачи имеют решение при $M_q = 0$, тогда функции $\Psi^q(y)$ определены при любых y, а координирующая задача

$$\min \left\{ \sum_{q=1}^{Q} \Psi^q(y) : y \in E^L \right\} \quad (15)$$

является задачей выпуклого программирования без ограничений.

Для решения задачи (15) могут применяться известные алгоритмы негладкой оптимизации [2, 7, 8], использующие на каждом шаге ε-субградиент функции $\Psi(y) = \sum_{q=1}^{Q} \Psi^q(y)$. Для получения таких ε-субградиентов должны приближенно решаться задачи (14) при $q = 1, \ldots, Q$ и строиться ε^q-субградиенты функций $\Psi^q(y)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные результаты могут быть полезны при разработке алгоритмов декомпозиции при решении задач вида (9), (10). Применение таких алгоритмов наиболее эффективно в случаях, когда исходная задача (9), (10) распадается на подзадачи, большинство из которых имеют специальную структуру и эффективные алгоритмы решения; подзадач общего вида немного и их размерность невелика.

На основе предлагаемого подхода разрабатываются отдельные классы рекурсивной объектно-ориентированной библиотеки RBL [1], предназначенной для оптимизационного моделирования задач, имеющих сложную структуру. При создании приложений прикладные классы должны порождаться от базовых классов библиотеки RBL. Для подзадач, имеющих специальную структуру, могут разрабатываться соответствующие алгоритмы решения.

Автор благодарит Н.З. Шора, Н.Г. Журбенко и В.М. Панина за полезные обсуждения и советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаптин Ю.П., Журбенко Н.Г. Разработка программных средств оптимизации сложных технических объектов // Теорія оптимальних рішень. — Київ: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2002. — С. 3–12.

2. Shor N.Z. Nondifferentiable optimization and polynomial problems. — London: Kluwer Acad. Publ., 1998. — 381 p.

3. Lemarechal C. An algorithm for minimizing convex functions // Proc. of IFIP Congress. — Amsterdam: North-Holland, 1974. — P. 552–556.

4. Ржевский С.В. Монотонные методы выпуклого программирования. — Киев: Наук. думка, 1993. — 316 с.
5. Журбенко Н.Г. Об одном ε-субградиентном алгоритме минимизации // Теорія оптимальних рішень. — Київ: Ін-т кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України, 2002. — С. 111–118.
6. Пшеничный Б.Н. Метод линеаризации. — М.: Наука, 1983. — 136 с.
7. Демьянов В. Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. — М.: Наука, 1981. — 384 с.
8. Condzio J., Vial J.-P. Warm start and ε-subgradients in a cutting plane scheme for block-angular linear programs // Comput. Optimiz. and Appl. — 1999. — 14. — P. 17–36.
9. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. Теория, методы и приложения. — М.: Наука, 1969. — 424 с.

Поступила 28.05.2003

УДК 330.115:519.2

Б.Б. ДУНАЕВ

МОДЕЛЬ РАСЧЕТА ВАЛОВОГО ВНУТРЕННЕГО ПРОДУКТА КАК ФУНКЦИИ ТРУДА И КАПИТАЛА

Ключевые слова: *макроэкономика, моделирование, капитал, труд, зарплата, измерение.*

ВВЕДЕНИЕ

Реальный, т.е. в ценах предыдущего года, объем выпуска товаров и услуг Q в экономике страны в рассматриваемом году аппроксимируют производственной функцией Кобба–Дугласа при количестве работающих Π и используемом капитале K в сфере производства и при коэффициенте α технологии производства [1, с. 430]:

$$Q = \Pi^{\alpha} K^{1-\alpha}. \tag{1}$$

Количество работающих в сфере производства является известной частью ξ количества N работающих в экономике, $\Pi = \xi N$. При количестве T населения страны количество N работающих в экономике определяется в результате взаимодействия на рынке труда спроса на труд N^D и его предложения N^S. Равновесное количество N_0 полной занятости населения в экономике наступает при равенстве на рынке труда спроса на труд и предложения труда, $N^D = N^S = N_0$, как необходимом условии общего экономического равновесия [2, с. 15]. Разность предложения труда и спроса на труд определяет теоретическую безработицу, $f = N^S - N^D$. Фактическая безработица зависит от разности предложения труда и количества работающих, $f_{\text{ф}} = N^S - N$.

© Б.Б. Дунаев, 2004