СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Prabhu N. U. Stochastic Storage Processes: Queues, Insurance Risk, Dams, and Data Communication. — Berlin: Springer-Verlag, 1998. — 206 p.
2. Малышев В. А. Уравнения Винера-Хопфа и их применения в теории вероятностей // Итоги науки и техники. Т. 13. Теория вероятностей. Мат. статистика. Теор. кибернетика. — М.: ВИНИТИ, 1976. — С. 5–35.
3. Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // Успехи мат. наук. — 1958. — 13, № 5. — С. 3–120.
4. Asmussen S. A probabilistic look at the Wiener–Hopf equation // SIAM Review. — 1998. — 40, N 2. — P. 189–201.
5. Spitzer F. The Wiener-Hopf equation whose kernel is a probability density // Duke Math. J. — 1957. — 24, N 3. — P. 327–344.
6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981. — 542 с.
7. Биркгоф Г. Теория структур. — М.: Изд-во. иностр. лит., 1952. — 300 с.

Поступила 13.10.2004

УДК 519.8

Ю.П. ЛАПТИН, Н.Г. ЖУРБЕНКО

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РЕШЕНИЯ БЛОЧНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ СО СВЯЗЫВАЮЩИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Ключевые слова: *выпуклое программирование, декомпозиция, ε-субградиент, методы негладкой оптимизации.*

В настоящей работе рассматриваются блочные нелинейные задачи выпуклого программирования со связывающими переменными, возникающие, в частности, при моделировании сложных технических объектов [1]. Эффективным подходом к решению таких задач является применение схем декомпозиции по переменным, в которых исходная сложная задача заменяется совокупностью более простых подзадач для каждого блока и специальной координирующей задачей. При решении последней на каждой итерации решаются подзадачи для блоков.

Использование схем декомпозиции приводит к естественному распараллеливанию алгоритмов оптимизации и позволяет применять такие алгоритмы на многопроцессорных системах.

Свойства функций, входящих в координирующую задачу, исследовались в разных работах, в частности в [2]. При этом предполагалось, что подзадачи для каждого блока решаются точно. Вопросам использования приближенных решений подзадач в схемах декомпозиции посвящены статьи [3–5]. Предложенный там подход основан на решении аппроксимационной задачи линейного программирования, имеет ясный геометрический смысл, но оказывается вычислительно неустойчивым для некоторых классов задач [5]. В данной работе исследуются возможности использования приближенных решений и информации, генерируемой ε-субградиентыми методами [6–8] и методами линеаризации [9, 10] в ходе решения подзадач.

Функции, входящие в координирующую задачу, в общем случае определены на неявно заданных ограниченных множествах. С этим связаны сложности при использовании методов оптимизации. В [3] рассматривалась регуляризация исходной задачи, при которой функции координирующей задачи определены при любых значениях связывающих переменных. Предложенный подход основан на введении вспомогательных переменных и приводит к удвоению числа переменных для каждой подзадачи. Регуляризация, предлагаемая в настоящей работе, основана на введении одной вспомогательной переменной для каждой подзадачи.

1. Рассматривается блочная задача математического программирования со связывающими переменными: найти

$$\min_{x,\, y}\left\{\sum_{q=1}^{Q} f_q^0(x, y^q) : f_q^i(x, y^q) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, I_q, \quad q = 1, \ldots, Q\right\}, \tag{1}$$

где $f_q^i(x, y^q)$ — выпуклые собственные функции $(L + N_q)$ — размерного вектора (x, y^q), $x \in E^L$, $y^q \in E^{N_q}$, $i = 0, \ldots, I_q$, $q = 1, \ldots, Q$.

Предполагается, что каждая компонента вектора y^q изменяется в некоторых пределах

$$L^q \leqslant y^q \leqslant U^q, \; q = 1, \ldots, Q, \tag{2}$$

и ограничения (2) входят в общие ограничения задачи (1).

Пусть связывающие переменные x фиксированы, $x = \bar{x}$. Обозначим $D_q(x) = \left\{y^q \in E^{N_q} : f_q^i(x, y^q) \leqslant 0, \; i = 1, \ldots, I_q\right\}$ и определим функцию $\Phi^q(x)$:

$$\Phi^q(x) = \begin{cases} \min\left\{f_q^0(x, y^q) : y^q \in D_q(x)\right\}, \; x \in W_q, \\ +\infty, \quad x \notin W_q. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь W_q — множество тех значений вектора x, для которых решение оптимизационной задачи в (3) существует.

В схемах декомпозиции решается задача, эквивалентная исходной задаче (1): найти

$$\min\left\{\sum_{q=1}^{Q} \Phi^q(x) : x \in E^L\right\}. \tag{4}$$

Свойства функций $\Phi^q(x)$ исследовались в [2]. Процедуры, позволяющие вычислять ε-субградиенты функций $\Phi^q(x)$ на основании приближенного решения оптимизационной задачи в (3), рассматривались в [3–5].

2. При описании свойств функций $\Phi^q(x)$, $f_q^i(x, y^q)$, множеств W_q, $D_q(x)$ индекс q, если это не вызывает неоднозначности, опускается. Пусть $D = \left\{(x, y) : f^i(x, y) \leqslant 0, \; i = 1, \ldots, I\right\}$ — непустое замкнутое множество. Предполагается, что $D \subset \operatorname{int} \operatorname{dom} f^i$, $i = 0, \ldots, I$.

Рассмотрим точку $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{int} \operatorname{dom} f^i$, $i = 0, \dots, I$, $\overline{x} \in \operatorname{int} W$. Пусть в данной точке вычислены ε_i-субградиенты $g^i = (g_x^i, g_y^i)$ функций f^i, $i = 0, 1, \dots, I$.

Пусть заданы некоторые числа $\overline{u}_i \geqslant 0$, $i = 1, \dots, I$. Положим

$$p = -\left(g_y^0 + \sum_{i=1}^{I} \overline{u}_i\, g_y^i\right), \tag{5}$$

$$\theta_j = \begin{cases} U_j - \overline{y}_j, & \text{если } p_j \geqslant 0, \\ L_j - \overline{y}_j, & \text{если } p_j < 0, \end{cases} \tag{6}$$

где $\overline{y}_j, p_j$ — компоненты векторов $\overline{y}, p$, числа U_j, L_j — верхние и нижние границы компонент $\overline{y}_j$, $j = 1, \dots, N$.

Теорема 1. Для любых заданных чисел $\overline{u}_i \geqslant 0$, $i = 1, \dots, I$, имеют место утверждения:

1) $\Phi(\overline{x}) \geqslant f^0(\overline{x}, \overline{y}) - \overline{\varepsilon}$;

2) если $\overline{y} \in D(\overline{x})$, то $\overline{\varepsilon}$-субградиент функции $\Phi(x)$ в точке $x = \overline{x}$ может быть вычислен по формуле

$$g_{\Phi}^{\overline{\varepsilon}}(\overline{x}) = g_x^0 + \sum_{i=1}^{I} \overline{u}_i\, g_x^i, \tag{7}$$

где

$$\overline{\varepsilon} = \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^{I} \overline{u}_i(\varepsilon_i - f^i(\overline{x}, \overline{y})) + \sum_{j=1}^{N} \theta_j\, p_j. \tag{8}$$

Доказательство. По определению ε-субградиента имеем

$$f^0(x, y) \geqslant f^0(\overline{x}, \overline{y}) + (g_x^0, x - \overline{x}) + (g_y^0, y - \overline{y}) - \varepsilon^0, \tag{9}$$

$$f^i(x, y) \geqslant f^i(\overline{x}, \overline{y}) + (g_x^i, x - \overline{x}) + (g_y^i, y - \overline{y}) - \varepsilon^i, \quad i = 1, \dots, I. \tag{10}$$

Умножая (10) на $\overline{u}_i \geqslant 0$, $i = 1, \dots, I$, и складывая с (9), получаем

$$\begin{gathered} f^0(x, y) + \sum_{i=1}^{I} \overline{u}_i f^i(x, y) \geqslant f^0(\overline{x}, \overline{y}) + \sum_{i=1}^{I} \overline{u}_i f^i(\overline{x}, \overline{y}) + \\ + \left(g_x^0 + \sum_{i=1}^{I} \overline{u}_i\, g_x^i,\ x - \overline{x}\right) + \left(g_y^0 + \sum_{i=1}^{I} \overline{u}_i\, g_y^i,\ y - \overline{y}\right) - \varepsilon^0 - \sum_{i=1}^{I} \overline{u}_i\, \varepsilon^i. \end{gathered} \tag{11}$$

Заметим, что для вектора y, удовлетворяющего условию (2), имеет место неравенство

$$\left(g_y^0 + \sum_{i=1}^{I} \overline{u}_i\, g_y^i,\ y - \overline{y}\right) \geqslant -\sum_{j=1}^{N} \theta_j\, p_j. \tag{12}$$

Обозначим $y(x)$ решение задачи (3) для заданного x. Очевидно, что

$$\Phi(x) \geqslant f^0(x, y(x)) + \sum_{i=1}^{I} \overline{u}_i f^i(x, y(x)). \tag{13}$$

Подставляя точку $(\overline{x}, y(\overline{x}))$ в (11) и учитывая (12), (13), получаем первое утверждение теоремы.

Пусть $\overline{y}$ — допустимая точка, т.е. $\overline{y} \in D(\overline{x})$. Тогда, очевидно, $f^0(\overline{x}, \overline{y}) \geqslant \Phi(\overline{x})$. Учитывая последнее неравенство, а также (12), (13), получаем из (11)

$$\Phi(x) \geqslant \Phi(\overline{x}) + \left(g_x^0 + \sum_{i=1}^{I} \overline{u}_i g_x^i,\ x - \overline{x} \right) + \sum_{i=1}^{I} \overline{u}_i f^i(\overline{x}, \overline{y}) - \sum_{j=1}^{N} \theta_j p_j - \varepsilon^0 - \sum_{i=1}^{I} \overline{u}_i \varepsilon^i,$$

откуда следует второе утверждение.

Теорема доказана.

Другое доказательство для случая, когда вектор $p = 0$, приведено в [3].

При практическом использовании полученных результатов необходимо определять, каким образом строить ε_i-субградиенты $g^i = (g_x^i, g_y^i)$ функций f^i и как выбирать множители $\overline{u}_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, I$. Следующие теоремы посвящены этим вопросам.

Пусть задана совокупность $\{y^1, y^2, \ldots, y^m\}$ точек из E^N, в каждой точке $(\overline{x}, y^k)$ вычислены значения $f^{ik} = f^i(\overline{x}, y^k)$ и субградиенты $g^{ik} = (g_x^{ik}, g_y^{ik})$ функций f^i, $i = 0, \ldots, I$, $k = 1, \ldots, m$.

Рассмотрим линейную аппроксимацию задачи (3) при фиксированном $x = \overline{x}$: найти

$$\min_{y, \xi} \xi, \tag{14}$$

при ограничениях

$$f^{ik} + (g_y^{ik},\ y - y^k) \leqslant \xi, \quad k = 1, \ldots, m, \ i = 0, \tag{15}$$

$$f^{ik} + (g_y^{ik},\ y - y^k) \leqslant 0, \quad k = 1, \ldots, m, \ i = 1, \ldots, I. \tag{16}$$

Теорема 2 [4]. Пусть $\overline{y} \in D(\overline{x})$, ξ^* — оптимальное значение, $\overline{u}_{ik}$ — оптимальные значения двойственных переменных, $k = 1, \ldots, m$, $i = 0, \ldots, I$, задачи (14)–(16). Тогда $g_{\Phi}^{\overline{\varepsilon}}(\overline{x}) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{I} \overline{u}_{ik} g_x^{ik}$, где $\overline{\varepsilon} = f^0(\overline{x}, \overline{y}) - \xi^*$.

Приведенная теорема определяет правило оценки $\overline{\varepsilon}$ и вычисления $\overline{\varepsilon}$-субградиента функции $\Phi(x)$. Вопросы реализации такого подхода рассматривались в [4]. Оказалось, что достаточно часто в окрестности оптимума задачи (3) аппроксимационная задача линейного программирования (14)–(16) плохо обусловлена (например, если (3) — гладкая задача без ограничений), что затрудняет использование данного подхода при решении задач с высокой точностью.

Рассмотрим использование модификации [9, 10] метода линеаризации для вычисления $\bar{\varepsilon}$-субградиентов функции $\Phi(x)$. На каждой итерации m метода вместо задачи (14)–(16) решается вспомогательная задача: найти

$$q^* = \min_{y,\, \xi} \left\{ \frac{1}{2} \|y - \bar{y}\|^2 + \xi \right\}, \tag{17}$$

при ограничениях

$$f^{ik} + (g_y^{ik}, y - y^k) \leqslant \xi, \quad k = 1, \ldots, m, \quad i = 0, \tag{18}$$

$$f^{ik} + (g_y^{ik}, y - y^k) \leqslant 0, \quad k = 1, \ldots, m, \quad i = 1, \ldots, I, \tag{19}$$

где точка $\bar{y}$ на каждой итерации выбирается по некоторым правилам.

Обозначим: y^*, ξ^* — оптимальное решение, $\bar{u}_{ik}$ — оптимальные значения двойственных переменных вспомогательной задачи (17)–(19), $k = 1, \ldots, m$, $i = 0, \ldots, I$,

$$\theta_j = \begin{cases} U_j - \bar{y}_j, & \text{если } y_j^* - \bar{y}_j \geqslant 0, \\ L_j - \bar{y}_j, & \text{если } y_j^* - \bar{y}_j \leqslant 0. \end{cases} \tag{20}$$

Теорема 3. Справедливы следующие соотношения:

1) $\Phi(\bar{x}) \geqslant \xi^* + \|y^* - \bar{y}\|^2 - \sum_{j=1}^{N} \theta_j (y_j^* - \bar{y}_j)$;

2) если $\bar{y} \in D(\bar{x})$, то $g_\Phi^{\bar{\varepsilon}}(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{I} \bar{u}_{ik} g_x^{ik}$,

где $\bar{\varepsilon} = f^0(\bar{x}, \bar{y}) - \xi^* - \|y^* - \bar{y}\|^2 + \sum_{j=1}^{N} \theta_j (y_j^* - \bar{y}_j)$.

Доказательство. Сначала сформулируем две леммы.

Лемма 1. Пусть для некоторых i, k выполняется $\bar{u}_{ik} > 0$, тогда g^{ik} — ε^{ik}-субградиент функции f^i в точке $(\bar{x}, \bar{y})$, где

$$\varepsilon^{ik} = \begin{cases} f^i(\bar{x}, \bar{y}) + (g_y^{ik}, y^* - \bar{y}), & i > 0, \\ f^0(\bar{x}, \bar{y}) - \xi^* + (g_y^{0k},\ y^* - \bar{y}), & i = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$\varepsilon^{ik} = f^i(\bar{x}, \bar{y}) - f^{ik} - (g_y^{ik}, \bar{y} - y^k) = f^i(\bar{x}, \bar{y}) - f^{ik} -$$

$$- (g_y^{ik},\ \bar{y} - y^k + y^* - y^*) = f^i(\bar{x}, \bar{y}) + (g_y^{ik},\ y^* - \bar{y}) - \left[f^{ik} + (g_y^{ik}, y^* - y^k) \right].$$

Поскольку $\bar{u}_{ik} > 0$, соответствующее ограничение выполняется как равенство в оптимальной точке. Отсюда следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Положим

$$\bar{u}_i = \sum_{k=1}^{m} \bar{u}_{ik}, \quad i = 1, \ldots, I. \tag{22}$$

Лемма 2. Пусть для некоторого $i \in \{1, \dots, I\}$ выполняется $\overline{u}_i > 0$. Тогда вектор $g^i = (\overline{u}_i)^{-1} \left(\sum_{k=1}^{m} \overline{u}_{ik} g^{ik} \right)$ — ε_i-субградиент функции f^i в точке $(\overline{x}, \overline{y})$, где

$$\varepsilon_i = (\overline{u}_i)^{-1} \left(\sum_{k=1}^{m} \overline{u}_{ik} g_y^{ik},\ y^* - \overline{y} \right) + \begin{cases} f^i(\overline{x}, \overline{y}), \text{ если } i > 0, \\ f^0(\overline{x}, \overline{y}) - \xi^*, \quad \text{если } i = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Доказательство. В соответствии с леммой 1 имеем $f^i(x, y) \geqslant f^i(\overline{x}, \overline{y}) + (g_x^{ik}, x - \overline{x}) + (g_y^{ik}, y - \overline{y}) - \varepsilon^{ik}$, $k = 1, \dots, m$. Умножая неравенства на $\overline{u}_{ik}$, суммируя по k и подставляя значения для ε^{ik}, получаем утверждение леммы.

Перейдем к доказательству теоремы 3.

Пусть совокупность чисел $\overline{u}_i$, $i = 1, \dots, I$, определена в соответствии с (22). Определим совокупность ε_i-субградиентов g^i функций f^i, $i = 1, \dots, I$, в точке $(\overline{x}, \overline{y})$:

а) если $\overline{u}_i > 0$, то g^i определяется в соответствии с леммой 2;

б) если $\overline{u}_i = 0$, то g^i определяется произвольным образом.

Соотношения (7) и (8) в соответствии с теоремой 1 определяют $\overline{\varepsilon}$-субградиент $g_\Phi^{\overline{\varepsilon}}(\overline{x})$ и значение $\overline{\varepsilon}$. Подставляя g^i в (7) и производя очевидные преобразования, получаем выражение для $g_\Phi^{\overline{\varepsilon}}(\overline{x})$.

Из условий оптимальности для задачи (17)–(19) имеем

$$(y^* - \overline{y}) + \sum_{k=1}^{m} \overline{u}_{0k} g_y^{0k} + \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{I} \overline{u}_{ik} g_y^{ik} = 0, \quad (24)$$

$$\sum_{k=1}^{m} \overline{u}_{0k} = 1. \quad (25)$$

Сравнивая (5) с соотношениями (24), (25), нетрудно видеть, что $\eta = y^* - \overline{y}$.

Обозначим $\varepsilon^{\sim} = \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^{I} \overline{u}_i (\varepsilon_i - f^i(\overline{x}, \overline{y}))$. Тогда (8) преобразуется к виду $\overline{\varepsilon} = \varepsilon^{\sim} + \sum_{j=1}^{N} \theta_j p_j$. Оценим величину $\varepsilon^{\sim}$. Подставляя значения ε_i из (23), а $\overline{u}_i$ — из (22), получаем

$$\varepsilon^{\sim} = \left(\sum_{k=1}^{m} \overline{u}_{0k} g_y^{0k}, y^* - \overline{y} \right) + f^0(\overline{x}, \overline{y}) - \xi^* + \sum_{i=1}^{I} \left(\sum_{k=1}^{m} \overline{u}_{ik} g_y^{ik}, y^* - \overline{y} \right) =$$

$$= f^0(\overline{x}, \overline{y}) - \xi^* + \left(\sum_{k=1}^{m} \overline{u}_{0k} g_y^{0k} + \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{I} \overline{u}_{ik} g_y^{ik} + (y^* - \overline{y}) - (y^* - \overline{y}),\ y^* - \overline{y} \right) =$$

$$= f^0(\overline{x}, \overline{y}) - \xi^* - \| y^* - \overline{y} \|^2.$$

Последнее равенство вытекает из (24), откуда следует оценка для $\bar{\varepsilon}$.

Теорема доказана.

Как точка $\bar{y}$, так и оценка $\bar{\varepsilon}$ зависят от номера m итерации метода линеаризации. Эта зависимость не отображалась явно при формулировке результатов. Можно показать, что из сходимости [9, 10] методов линеаризации следует $\bar{\varepsilon} \to 0$ при $m \to \infty$. Это позволяет прерывать процесс решения задачи (3) при достижении требуемой точности.

3. Рассмотрим возможности использования ε-субградиентых методов для построения ε-субградиентов функций $\Phi(x)$. Будем предполагать, что функции $f^i(x, y)$, $i = 0, 1, \ldots, I$, определены на всем пространстве $E^L \times E^N$, $\bar{x} \in \operatorname{int} W$, для множества $D(\bar{x})$ выполняется условие Слейтера. Используя негладкие штрафы, представим задачу (3) в виде

$$\Phi(\bar{x}) = \min\left\{ f^0(\bar{x}, y) + \sum_{i=1}^{I} \lambda_i \left(f^i(\bar{x}, y)\right)^+ : y \in E^N \right\}, \tag{26}$$

где $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, I$, — достаточно большие числа, $(t)^+ = \begin{cases} t, & \text{если } t > 0; \\ 0, & \text{если } t \leqslant 0. \end{cases}$

Задача (26) не имеет ограничений. Обозначим $\varphi(x, y) = f^0(x, y) + \sum_{i=1}^{I} \lambda_i \left(f^i(x, y)\right)^+$.

Пусть точка $\bar{y}$ — ε-оптимальная точка задачи (26), тогда:

1) в точке $(\bar{x}, \bar{y})$ существует ε-субградиент $g^\varphi = (g_x^\varphi, g_y^\varphi)$ функции $\varphi(x, y)$, такой, что

$$g_y^\varphi = 0; \tag{27}$$

2) из теоремы 1 следует, что ε-субградиент функции $\Phi(x)$ в точке $x = \bar{x}$ равен

$$g_\Phi^\varepsilon(\bar{x}) = g_x^\varphi. \tag{28}$$

При построении ε-субградиента $g^\varphi = (g_x^\varphi, g_y^\varphi)$, удовлетворяющего условию (27), можно использовать процедуры внутренней аппроксимации ε-субдифференциала, применяемые в методах ε-субградиентого спуска [6–8].

4. При реализации схемы декомпозиции необходимо преодолеть существенные трудности, связанные с неявным описанием множеств W_q, $q = 1, \ldots, Q$, на которых определены функции $\Phi^q(x)$. В [2, 3, 5] для этого рассматривались различные подходы. В настоящей работе предлагается регуляризация исходной задачи, требующая введения только одной вспомогательной переменной для каждого блока.

Будем предполагать, что для каждого блока q задана точка x_0^q такая, что $x_0^q \in W_q$, $q = 1, \ldots, Q$, т.е. решение оптимизационной задачи в (3) существует для точки x_0^q. Введем вспомогательные переменные α_q, $q = 1, \ldots, Q$, $\alpha_q \in E^1$, и рассмотрим следующую задачу: найти

$$\min_{x, y, \alpha} \sum_{q=1}^{Q} f_q^0\left(x_0^q + \alpha_q (x - x_0^q), y^q\right) \tag{29}$$

при ограничениях

$$f_q^i(x_0^q + \alpha_q(x - x_0^q), y^q) \leqslant 0,\ i = 1, \dots, I_q,\ q = 1, \dots, Q, \tag{30}$$

$$0 \leqslant \alpha_q \leqslant 1,\ q = 1, \dots, Q, \tag{31}$$

$$1 - \alpha_q \leqslant 0,\ q = 1, \dots, Q. \tag{32}$$

Очевидно, что задача (29)–(32) эквивалентна исходной задаче (1).

Обозначим $\varphi_q^i(x, \alpha_q, y^q) = f_q^i(x_0^q + \alpha_q(x - x_0^q), y^q)$, $i = 0, \dots, I_q$, $q = 1, \dots, Q$, и рассмотрим задачу

$$\min_{x,\, y,\, \alpha} \sum_{q=1}^{Q} \left\{ \varphi_q^0(x, \alpha_q, y^q) + M_q(1 - \alpha_q)^+ \right\} \tag{33}$$

при ограничениях

$$\varphi_q^i(x, \alpha_q, y^q) \leqslant 0,\ i = 1, \dots, I_q,\ q = 1, \dots, Q, \tag{34}$$

$$0 \leqslant \alpha_q \leqslant 1,\ \ q = 1, \dots, Q, \tag{35}$$

где функция $(t)^+ = \begin{cases} t, & \text{если } t > 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Из свойств негладких штрафных функций следует, что если задача (29)–(32) имеет решение, то при достаточно больших положительных значениях M_q, $q = 1, \dots, Q$, решения задач (29)–(32) и (33)–(35) совпадают.

При фиксированных значениях x задача (33)–(35) распадается на подзадачи для каждого блока q: найти

$$\Psi^q(x) = \min_{y^q,\, \alpha_q} \left\{ \varphi_q^0(x, \alpha_q, y^q) + M_q[1 - \alpha_q]^+ \right\} \tag{36}$$

при ограничениях

$$\varphi_q^i(x, \alpha_q, y^q) \leqslant 0,\ \ i = 1, \dots, I_q, \tag{37}$$

$$0 \leqslant \alpha_q \leqslant 1. \tag{38}$$

Заметим, что при фиксированном $\alpha_q = 0$ задача (36)–(38) имеет решение для любого x, т.е. функция $\Psi^q(x)$ определена при любых x.

Таким образом, координирующая задача

$$\min \left\{ \sum_{q=1}^{Q} \Psi^q(x) : x \in E^l \right\} \tag{39}$$

является задачей выпуклого программирования без ограничений.

Эффективность программной реализации описанной схемы декомпозиции по переменным проверена при решении задач оптимального проектирования сложных технических объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Использование средств оптимизации в системе автоматизированного проектирования энергетических котлоагрегатов КРОКУС / Ю.П. Лаптин, М.М. Левин, П.И. Волковицкая и др. // Энергетика и электрификация. — 2003. — № 7. — С. 41–51.
2. Shor N. Z. Nondifferentiable optimization and polynomial problems. — London: Kluwer Acad. Publ., 1998. — 381 p.
3. Лаптин Ю.П. Декомпозиция по переменным для некоторых задач оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 1. — С. 98–104.
4. Лаптин Ю.П. ε-субградиенты в методах декомпозиции по переменным для некоторых задач оптимизации // Теорія оптимальних рішень. — К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2003. — № 2. — С. 75–82.
5. Лаптин Ю.П., Журбенко Н.Г., Кузьменко В.Н. Решение блочных нелинейных задач оптимизации со связывающими переменными // Там же. — 2004. — № 3. — С. 142–149.
6. Lemarechal C., Mifflin K. Nonsmooth optimization. — Oxford: Pergamon Press, 1978. — 180 p.
7. Ржевский С.В. Монотонные методы выпуклого программирования. — Киев: Наук. думка, 1993. — 319 с.
8. Журбенко Н.Г. Об одном ε-субградиентном алгоритме минимизации // Теория оптимальных решений. — Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2002. — № 1. — С. 111–118.
9. Пшеничный Б.Н., Ненахов Э.И., Кузьменко В.Н. Комбинированный метод решения общей задачи выпуклого программирования // Кибернетика и системный анализ. — 1998. — № 4. — С. 121–134.
10. Кузьменко В.Н., Бойко В.В. О применении комбинированного метода выпуклого программирования // Теорія оптимальних рішень. — К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України. — 2003. — № 2. — С. 19–24.
11. Шор Н.З., Журбенко Н.Г. Метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градиентов // Кибернетика. — 1971. — № 3. — С. 51–59.

Поступила 19.07.2005

УДК 519.9 : 681.3

О.В. ВЕРЁВКА, И.Н. ПАРАСЮК

ЛИНЕЙНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В НЕЧЕТКОМ ИНФОРМАЦИОННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ключевые слова: *линейная интерполяция, нечеткие числа, колоколоподобная функция принадлежности, нечеткие величины, интерполяционная поверхность, траверз, нечеткое линейное прогнозирование.*

ВВЕДЕНИЕ

При решении многих практических задач анализа сложных систем часто возникает необходимость оценки воздействия совокупности характеристик, на учете которых базируется дальнейшее принятие решений. Именно такой является, например, ситуация при решении задач классификации, диагностики, надежности и т.п. Успешность решения таких задач в значительной